LES PERPENDICULAIRES DE $\mathbb{R}^2$ EN NORME-4 NE SONT PRESQUE JAMAIS DROITES !

LUCAS BORBOLETA

Résumé. Dans l'espace vectoriel fini $\mathbb{R}^n$, toutes les normes sont équivalentes du point de vue topologique. Sont-elles aussi équivalentes pour l'orthogonalité ? Cet article illustre, pour $\mathbb{R}^2$, une différence majeure entre la norme-2, de l'espace euclidien, $\|(x,y)\|_2 = \sqrt{x^2+y^2}$ et la norme-4 $\|(x,y)\|_4 = \left(x^4+y^4\right)^{\frac{1}{4}}$: Contrairement à l'espace euclidien, les perpendiculaires en norme-4 ne sont presque jamais des droites ! Ceci souligne une singularité de l'espace euclidien.

Table des matières

1. Introduction

Dans l'espace vectoriel euclidien fini $\mathbb{R}^n$, l'algèbre sur les coordonnées des vecteurs banalise l'accès aux propriétés géométriques. Ainsi, le calcul de la longueur s'évalue par la norme ($\|(u_1,\cdots,u_n)\|_2 = \sqrt{|x_1|^2+\cdots+|x_n|^2}$) et l'orthogonalité se vérifie par le produit scalaire ($(u_1,\cdots,u_n) \perp (v_1,\cdots,v_n) \Leftrightarrow (u_1,\cdots,u_n)\cdot(v_1,\cdots,v_n) = u_1v_1+\cdots+u_nv_n = 0$). D'autre part, dans $\mathbb{R}^n$, toutes les normes sont équivalentes du point de vue topologique. Ainsi les p-normes$\|(u_1,\cdots,u_n)\|_p = (|x_1|^p+\cdots+|x_n|^p)^{\frac{1}{p}}$, pour $p \in [1,+\infty[$, produisent des propriétés équivalentes de continuité sur $\mathbb{R}^n$. Les normes de $\mathbb{R}^n$ sont-elles aussi équivalentes pour l'orthogonalité ? Cet article répond négativement par étude du cas de la norme-4 dans $\mathbb{R}^2$.

Dans les sections suivantes, on commence par définir l'orthogonalité et la perpendiculaire pour toute norme de $\mathbb{R}^n$, puis on en dérive quelques propriétés générales. Ensuite on se focalise sur le cas de la norme-4 dans $\mathbb{R}^2$. On cherche l'ensemble des éléments de $\mathbb{R}^2$ orthogonaux à un vecteur donné, sa perpendiculaire, qui ne sera presque jamais une droite. On présente le résultat, illustré d'une figure, et enfin les démonstrations. En conclusion, on relie ce résultat négatif aux motivations de l'auteur.

Date: 2010-11-20.

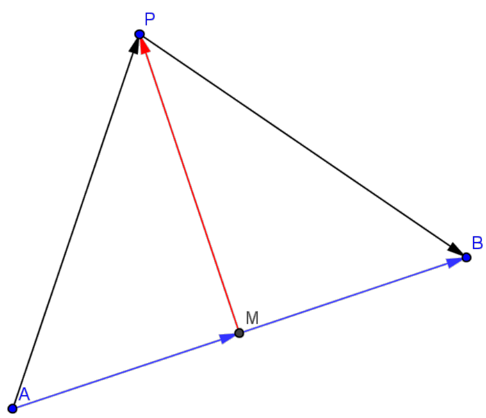
Pour une lecture rapide, consulter les sections "définition" et "résultat". Pour un aperçu express, aller directement voir la figure de la perpendiculaire "tordue" dans la section "résultat".

2. Définition de "orthogonal" et "perpendiculaire"

Dans cette section, par défaut, on considère une norme quelconque de $\mathbb{R}^n$.

Definition 1. Deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont dits orthogonaux, et on note $\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v}$, si et seulement si $\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\| = \|\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}\|$.

Remark. La figure ci-dessous illustre cette définition en appuyant les vecteurs sur les points d'un espace affine. Avec $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{MP}$, l'égalité $\|\overrightarrow{AP}\| = \|\overrightarrow{PB}\|$ est équivalente à $\|\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MP}\| = \|-\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{MB}\|$, soit $\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\| = \|\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}\|$.



Remark. Pour la norme-2, qui dérive d'un produit scalaire, $\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\|_2 = \|\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}\|_2$ est équivalent à $(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v})^2 = (\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v})^2$ et donc à $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 0$

Definition 2. La perpendiculaire d'un vecteur $\overrightarrow{u}$ est un ensemble de vecteurs, noté $Per(\overrightarrow{u})$, et défini par $Per(\overrightarrow{u}) \triangleq \{\overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^n : \overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v}\}$

Remark. Pour la norme-2, $Per(\overrightarrow{u}) = \{\overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^n : \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 0\}$, donc $Per(\overrightarrow{u})$ est un espace vectoriel grâce à la linéarité du produit scalaire.

3. Propriétés générales de l'orthogonalité

Dérivons quelques propriétés générales de l'orthogonalité pour une norme quelconque de $\mathbb{R}^n$.

Proposition 3. *L'orthogonalité est une relation* symétrique *:*

$$\forall (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v} \Leftrightarrow \overrightarrow{v} \perp \overrightarrow{u}$$

Démonstration. $\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\| = \|\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}\| \Leftrightarrow \|\overrightarrow{v} + \overrightarrow{u}\| = \|-(\overrightarrow{v} - \overrightarrow{u})\| = \|\overrightarrow{v} - \overrightarrow{u}\|$ □

Proposition 4. *L'orthogonalité est* paire *:*

$$\forall (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v} \Leftrightarrow \overrightarrow{u} \perp (-\overrightarrow{v})$$

Démonstration. $\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\| = \|\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}\| \Leftrightarrow \|\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}\| = \|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\| \Leftrightarrow \|\overrightarrow{u} + (-\overrightarrow{v})\| = \|\overrightarrow{u} - (-\overrightarrow{v})\|$ □

Proposition 5. *L'orthogonalité est* compatible *avec une* homothétie *:*

$$\forall (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \neq 0, \overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v} \Leftrightarrow \lambda \overrightarrow{v} \perp \lambda \overrightarrow{u}$$

Démonstration. $\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\| = \|\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}\| \Leftrightarrow |\lambda| \|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\| = |\lambda| \|\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}\| \Leftrightarrow \|\lambda \overrightarrow{u} + \lambda \overrightarrow{v}\| = \|\lambda \overrightarrow{u} - \lambda \overrightarrow{v}\|$ □

Proposition 6. *Deux vecteurs* orthogonaux *non nuls sont* indépendants *:*

$$\forall (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}, \overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0}, \overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v} \Rightarrow \left(\lambda \overrightarrow{u} + \mu \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0} \Rightarrow \lambda = \mu = 0\right)$$

Démonstration. Faisons l'hypothèse $\mu \neq 0$ alors $\lambda \overrightarrow{u} + \mu \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0} \Rightarrow \overrightarrow{v} = -\frac{\lambda}{\mu} \overrightarrow{u}$. L'orthogonalité des deux vecteurs se réécrit alors $\| \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right) \overrightarrow{u}\| = \| \left(1 + \frac{\lambda}{\mu}\right) \overrightarrow{u}\|$. Les deux vecteurs étant non nuls cela implique $\left|1 - \frac{\lambda}{\mu}\right| = \left|1 + \frac{\lambda}{\mu}\right|$ou encore$|\mu - \lambda| = |\mu + \lambda|$. Donc $\mu - \lambda = \mu + \lambda$ ou bien $\mu - \lambda = -\mu - \lambda$. Soit seulement $\lambda = 0$ car par hypothèse $\mu \neq 0$. Mais $0\vec{u} + \mu\vec{v} = \overrightarrow{0} \Rightarrow \mu = 0$ donc l'hypothèse initiale est contredite. On aurait le même résultat absurde avec l'hypothèse $\lambda \neq 0$. Conclusion : $\lambda = \mu = 0$. □

Proposition 7. *Tout vecteur orthogonal à lui-même est nul :*

$$\forall \overrightarrow{u} \in \mathbb{R}^n, \overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{u} \Leftrightarrow \overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$$

Démonstration. $\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{u} \Leftrightarrow \|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{u}\| = \|\overrightarrow{u} - \overrightarrow{u}\| = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$ □

Proposition 8. *Le vecteur nul est le seul vecteur orthogonal à tous les autres :*

$$\forall \overrightarrow{u} \in \mathbb{R}^n, \overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{0}$$

$$\forall \overrightarrow{w} \in \mathbb{R}^n, (\forall \overrightarrow{u} \in \mathbb{R}^n, \overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{w}) \Rightarrow \overrightarrow{w} = \overrightarrow{0}$$

Démonstration. $\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{0}\| = \|\overrightarrow{u} - \overrightarrow{0}\|$
$\forall \overrightarrow{u} \in \mathbb{R}^n, \overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{w} \Rightarrow \overrightarrow{w} \perp \overrightarrow{w} \Leftrightarrow \|\overrightarrow{w} + \overrightarrow{w}\| = \|\overrightarrow{w} - \overrightarrow{w}\| = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{w} = \overrightarrow{0}$ □

4. Résultat et figure sur les 4-perpendiculaires dans $\mathbb{R}^2$

Proposition 9. *Pour un vecteur de $\mathbb{R}^2$ de coordonnées (a,b), sa perpendiculaire en norme-4, est définie par*

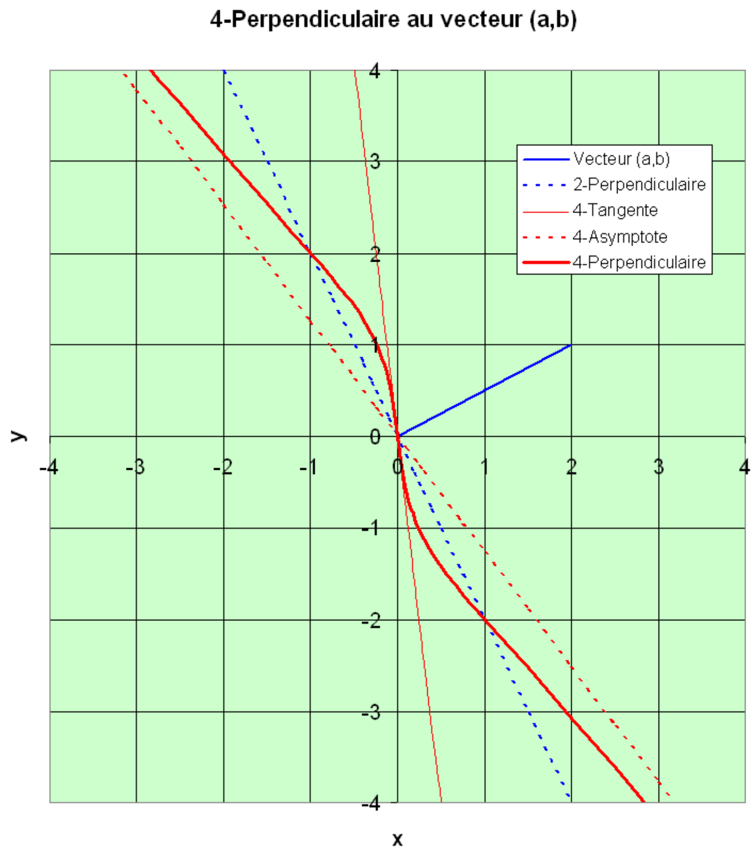
$$Per\left((a,b)\right) = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \|(a,b) + (x,y)\|_4 = \|(a,b) - (x,y)\|_4\right\}$$

, et prend une des formes suivantes :

- $\mathbb{R}^2$, si $a = b = 0$
- $\{(x,0) : x \in \mathbb{R}\}$, si $a = 0, b \neq 0$
- $\{(0,y) : y \in \mathbb{R}\}$, si $a \neq 0, b = 0$
- $\{(x,-x) : x \in \mathbb{R}\}$, si $a = b \neq 0$
- $\{(x,x) : x \in \mathbb{R}\}$, si $a = -b \neq 0$
- $\{(x, P(x)) : x \in \mathbb{R}\}$, si $a \neq 0, b \neq 0, |a| \neq |b|$, avec

$$P(x) = b\left\{\left(\frac{\sqrt{Q(x)^2 + \frac{4}{27}} - Q(x)}{2}\right)^{\frac{1}{3}} - \left(\frac{\sqrt{Q(x)^2 + \frac{4}{27}} + Q(x)}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\right\}$$

et
$$Q(x) = \left(\frac{a}{b}\right)^4 \left(\frac{x}{a}\right) \left(1 + \left(\frac{x}{a}\right)^2\right)$$
Le cas général de la 4-perpendiculaire dans $\mathbb{R}^2$ n'est donc jamais une droite ! L'asymptote de la fonction $x \mapsto P(x)$ est $x \mapsto y = -\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{3}} x$. Sa tangente à l'origine est $x \mapsto -\left(\frac{a}{b}\right)^3 x$. La figure ci-dessous illustre ce cas général.



5. Démonstrations

Démontrons les résultats exposés ci-dessus sur les perpendiculaires de $\mathbb{R}^2$ pour la norme-4.

5.1. **L'équation de la perpendiculaire.**

Donnons-nous un vecteur de $\mathbb{R}^2$ avec les coordonnées (a, b) et cherchons sa perpendiculaire :
$$Per((a,b)) = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \|(a,b) + (x,y)\|_4 = \|(a,b) - (x,y)\|_4\right\}$$
L'équation à satisfaire pour $(x, y) \in Per((a, b))$est :
$$\left((a+x)^4 + (b+y)^4\right)^{\frac{1}{4}} = \left((a-x)^4 + (b-y)^4\right)^{\frac{1}{4}}$$

En élevant à la puissance 4, puis en passant tous les termes à gauche, et en les factorisant, on obtient :

$$\left[(a+x)^2-(a-x)^2\right]\left[(a+x)^2+(a-x)^2\right]+\left[(b+y)^2-(b-y)^2\right]\left[(b+y)^2+(b-y)^2\right]=0$$

Finalement, en réduisant les termes entre crochets, nous obtenons l'*équation de la perpendiculaire* :

$$ax\left(a^2+x^2\right)+by\left(b^2+y^2\right)=0 \tag{5.1}$$

5.2. **Les cas triviaux.** Évacuons le premier cas trivial : $Per\left((0,0)\right)=\mathbb{R}^2$.

Le second cas trivial est $a=0, b\neq 0$ qui implique $y=0$ donc $Per\left((0,b)\right)=\{(x,0):x\in\mathbb{R}\}$.

Le troisième cas trivial est son symétrique avec $a\neq 0, b=0$ qui implique $x=0$ donc $Per\left((a,0)\right)=\{(0,y):y\in\mathbb{R}\}$.

5.3. **Les cas particuliers.** Le cas particulier $a=b\neq 0$ implique $x\left(a^2+x^2\right)+y\left(a^2+y^2\right)=0$, dont une solution simple est $y=-x$. Pour ce cas, c'est l'unique solution. En effet, on peut réécrire l'équation en $y^3+a^2y+x\left(a^2+x^2\right)=0$ et remarquer que la fonction $f:y\mapsto y^3+a^2y+x\left(a^2+x^2\right)$, se dérivant en $f':y\mapsto 2y^2+a^2$ toujours strictement positive, est strictement croissante de $-\infty$ à $+\infty$ et par conséquent ne s'annule qu'une seule fois. Au final, $a=b\neq 0$ implique $Per\left((a,a)\right)=\{(x,-x):x\in\mathbb{R}\}$.

De même le cas particulier $a=-b\neq 0$ implique $x\left(a^2+x^2\right)-y\left(a^2+y^2\right)=0$, dont une solution simple est $y=x$. Pour ce cas, c'est l'unique solution. En effet, on peut réécrire l'équation en $y^3+a^2y-x\left(a^2+x^2\right)=0$ et remarquer que la fonction $f:y\mapsto y^3+a^2y-x\left(a^2+x^2\right)$, se dérivant en $f':y\mapsto 2y^2+a^2$ toujours strictement positive, est strictement croissante de $-\infty$ à $+\infty$ et par conséquent ne s'annule qu'une seule fois. Au final, $a=-b\neq 0$ implique $Per\left((a,-a)\right)=\{(x,x):x\in\mathbb{R}\}$.

5.4. **Le cas général.** Passons au cas général $a\neq 0, b\neq 0, |a|\neq|b|$. Effectuons les changements de variables $X=\frac{x}{a}$, $Y=\frac{y}{b}$, et $c=\frac{a}{b}$, l'équation 5.1 devient :

$$c^4X\left(1+X^2\right)+Y\left(1+Y^2\right)=0$$

Soit encore, en développant, nous obtenons l'*équation réduite de la perpendiculaire* avec $c\notin\{-1,0,+1\}$:

$$Y^3+Y+c^4X\left(1+X^2\right)=0 \tag{5.2}$$

5.4.1. *La solution est unique.* On remarque que la fonction $g:Y\mapsto Y^3+Y+c^4X\left(1+X^2\right)$, se dérivant en $g':Y\mapsto 3Y^2+1$ toujours strictement positive, est strictement croissante de $-\infty$ à $+\infty$ et par conséquent ne s'annule qu'une seule fois. Par conséquent l'équation 5.2 possède une solution et elle est unique.

5.4.2. *La solution générale ne peut être une droite.* Remarquons aussi que l'équation 5.2 ne peut se résoudre par une droite $X \mapsto Y = AX + B$. En effet, puisque $(0,0) \in Per\,(a,b)$ cela impliquerait $B = 0$. La droite $X \mapsto Y = AX$ devrait alors satisfaire l'équation 5.2 par $A^3X^3 + AX + c^4X\left(1+X^2\right) = 0$, soit $\left(c^4 + A^3\right)X^3 + \left(c^4 + A\right)X = 0$. Ce qui requerrait $c^4 = -A = -A^3$, et aussi donc $A = -1$ et $c^4 = 1$, qui contredirait $c \notin \{-1, 0, +1\}$.

5.4.3. *La solution générale s'exprime avec une formule de Cardan.* Une formule de Cardan permet d'exprimer l'unique solution réelle de l'équation 5.2 avec $Q = c^4X\left(1+X^2\right)$:

$$Y = \left(\frac{-Q + \sqrt{Q^2 + \frac{4}{27}}}{2}\right)^{\frac{1}{3}} + \left(\frac{-Q - \sqrt{Q^2 + \frac{4}{27}}}{2}\right)^{\frac{1}{3}} \tag{5.3}$$

En revenant aux variables initiales (x, y), on a :$Per\,((a,b)) = \{(x, P\,(x)) : x \in \mathbb{R}\}$, avec $P\,(x) = b\left\{\left(\frac{\sqrt{Q(x)^2+\frac{4}{27}}-Q(x)}{2}\right)^{\frac{1}{3}} - \left(\frac{\sqrt{Q(x)^2+\frac{4}{27}}+Q(x)}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\right\}$ et $Q\,(x) = \left(\frac{a}{b}\right)^4\left(\frac{x}{a}\right)\left(1+\left(\frac{x}{a}\right)^2\right)$

5.4.4. *La solution asymptotique est une droite.* Récrivons l'équation 5.3 afin d'évaluer son comportement à l'infini :

$$Y = -Q^{\frac{1}{3}}\left\{\left(\frac{1 - sign\,(Q)\sqrt{1 + \frac{4}{27Q^2}}}{2}\right)^{\frac{1}{3}} + \left(\frac{1 + sign\,(Q)\sqrt{1 + \frac{4}{27Q^2}}}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\right\} \tag{5.4}$$

On en déduit $Q \longrightarrow \pm\infty \Rightarrow Y \to -Q^{\frac{1}{3}}$. En repassant à X, et notant que $X \longrightarrow \pm\infty \Rightarrow Q \to c^4X^3$, on en déduit le comportement asymptotique selon une droite :

$$X \longrightarrow \pm\infty \Rightarrow Y \to -c^{\frac{4}{3}}X$$

Finalement en revenant aux variables initiales (x, y), on a le comportement asymptotique selon une droite :

$$x \longrightarrow \pm\infty \Rightarrow y \to -\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{3}} x \tag{5.5}$$

5.4.5. *La solution approchée à l'origine est une autre droite.* Récrivons l'équation 5.3 afin d'évaluer son comportement à l'origine :

$$Y = \frac{1}{\sqrt{3}}\left\{\left(\sqrt{1 + \frac{27}{4}Q^2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}Q\right)^{\frac{1}{3}} - \left(\sqrt{1 + \frac{27}{4}Q^2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}Q\right)^{\frac{1}{3}}\right\} \tag{5.6}$$

Ne gardant que les termes de premier ordre en Q on obtient :

$$Q \to 0 \Rightarrow Y \to \frac{1}{\sqrt{3}}\left\{\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}Q\right) - \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}Q\right)\right\} = -Q$$

Soit encore, en la variable X :

$$X \to 0 \Rightarrow Y \to -c^4 X$$

Finalement en revenant aux variables initiales (x, y), on a le comportement à l'origine selon une droite :

$$x \longrightarrow 0 \Rightarrow y \to -\left(\frac{a}{b}\right)^3 x \tag{5.7}$$

Notons que cette tangente à l'origine est de pente différente de celle de l'asymptote.

6. Conclusion

Cet article n'apporte pas de résultat original, mais balise et communique un cheminement dans l'étude des structures de la géométrie euclidienne. Ce cheminement démarre par une fascination : pourquoi des puissances de 2 dans le théorème de Pythagore ? Cette fascination réside autant dans l'a-préhension des jeux d'axiomes que dans la construction de preuves. Dans cet esprit, cet article exhibe un contre-exemple : la norme-4 n'induit pas de sous-ensembles orthogonaux (les perpendiculaires) qui soient toujours des sous-espaces vectoriels. Les normes de $\mathbb{R}^n$ ne sont donc pas équivalentes quant à l'orthogonalité. Il est par conséquent nécessaire d'en augmenter leurs axiomes pour obtenir cette caractéristique euclidienne ; la connexion de la norme à un produit scalaire étant l'augmentation la plus connue.

7. Copyright

E-mail address: `lucas.borboleta@free.fr`