Les perpendiculaires de R^2 en norme-p ne sont presque jamais droites sauf pour p=2 !

LUCAS BORBOLETA[1]

Résumé : Cet article prolonge un précédent[2] article intitulé « les perpendiculaires de R^2 en norme-4 de sont presque jamais droites !». Cette fois, l'ensemble des normes-p, pour tout réel $p \geq 1$, est considéré. On montre que seule la norme-2 induit des perpendiculaires toujours droites.

TABLES DES MATIERES

1 Introduction

Dans l'espace vectoriel euclidien R^n, l'algèbre sur les coordonnées des vecteurs banalise le calcul de la longueur et la vérification de l'orthogonalité. D'autre part, dans R^n, toutes les normes sont équivalentes topologiquement. Cependant les normes de R^n sont-elles équivalentes quant à l'orthogonalité ?

En effet, l'orthogonalité de deux vecteurs peut se définir sur la norme, sans l'aide du produit scalaire :

$$\forall(\vec{u},\vec{v}) \in R^n \times R^n, \vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \|\vec{u}+\vec{v}\| = \|\vec{u}-\vec{v}\|$$

De même, la perpendiculaire à un vecteur peut se définir comme l'ensemble de ses vecteurs orthogonaux :

$$\forall \vec{u} \in R^n, Per(\vec{u}) \equiv \{\vec{v} \in R^n : \vec{u} \perp \vec{v}\}$$

Un précédent article intitulé « les perpendiculaires de R^2 en norme-4 de sont presque jamais droites !» montrait que ces définitions ne conduisent que rarement à des perpendiculaires $Per(\vec{u})$ qui soient des sous-espaces vectoriels de R^2, c'est-à-dire des « droites ». Cet article-ci étend ce résultat négatif à toutes les normes-p de R^2, sauf pour $p = 2$, norme de l'espace euclidien.

Le lecteur pressé se contentera parcourir la section décrivant le plan de la démonstration, la section de démonstration étant plutôt calculatoire.

---

[1] lucas.borboleta@free.fr

[2] Voir http://lucas.borboleta.blog.free.fr

2 Plan de la démonstration

Voici le plan de la démonstration :

- Pour chaque vecteur de (a,b) de l'espace R^2, on cherche sa perpendiculaire $Per((a,b))$, c'est-à-dire l'ensemble des vecteurs (x,y) tels que $\|(a,b)+(x,y)\| = \|(a,b)-(x,y)\|$.
- On fait l'hypothèse que c'est une droite $x \mapsto t \cdot x + u$
- Le point à l'origine appartient à la perpendiculaire, $(0,0) \in Per((a,b))$, donc la droite est nécessairement du type $x \mapsto t \cdot x$
- Le développement limité, à l'origine $(0,0)$, de l'égalité $\|(a,b)+(x,y)\| = \|(a,b)-(x,y)\|$ contraint le paramètre t à une valeur t_0.
- Le développement asymptotique, à l'infini, de l'égalité $\|(a,b)+(x,y)\| = \|(a,b)-(x,y)\|$ contraint le paramètre t à une valeur t_∞.
- La consistance $t_0 = t_\infty$ contraint la valeur de la p-norme à $p = 2$

3 Démonstration

Appliquons le plan de démonstration mentionné dans la section précédente.

3.1. L'équation étudiée

Développons l'équation associée à $(a,b) \perp (x,y)$:

$$\|(a+x,b+y)\| = \|(a-x,b-y)\| \Leftrightarrow \left(|a+x|^p + |b+y|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \left(|a-x|^p + |b-y|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

Elevant à la puissance p et regroupant les termes, nous obtenons l'équation étudiée par la suite :

$$\left(|a+x|^p - |a-x|^p\right) + \left(|b+y|^p - |b-y|^p\right) = 0$$

3.2. Les cas triviaux

Discutons les cas triviaux :

- Le cas $a = b = 0$ implique $Per((0,0)) = R^2$.
- Le cas $a \neq 0, b = 0$ implique $|a+x|^p - |a-x|^p = 0 \Leftrightarrow |a+x| = |a-x|$, soit $(a+x = a-x \quad ou \quad a+x = -a+x) \Leftrightarrow (x=0 \quad ou \quad a=0) \Leftrightarrow (x=0)$, donc $Per((a,0)) = \{(0,x) : x \in R\}$
- Le cas $a = 0, b \neq 0$ implique par symétrie $Per((0,b)) = \{(x,0) : x \in R\}$

3.3. Les cas particuliers

Discutons deux cas particuliers :

- Le cas $a = b \neq 0$ implique $\left(|a+x|^p - |a-x|^p\right) + \left(|a+y|^p - |a-y|^p\right) = 0$, soit encore $\left(\left|1+\frac{x}{a}\right|^p - \left|1-\frac{y}{a}\right|^p\right) + \left(\left|1+\frac{y}{a}\right|^p - \left|1-\frac{x}{a}\right|^p\right) = 0$, dont une solution évidente est $x \mapsto -x$.
  Y-a-t-il d'autres vecteurs solutions ? Au moins, on a $Per((a,a)) \supset \{(x,-x) : x \in R\}$.
- Le cas $a = -b \neq 0$ implique $\left(|a+x|^p - |a-x|^p\right) + \left(|-a+y|^p - |-a-y|^p\right) = 0$, soit encore $\left(|a+x|^p - |a+y|^p\right) + \left(|a-y|^p - |a-x|^p\right) = 0$, dont une solution évidente est $x \mapsto x$.
  Y-a-t-il d'autres vecteurs solutions ? Au moins, on a $Per((a,-a)) \supset \{(x,x) : x \in R\}$.

3.4. Le cas général

Concentrons nous ici sur le cas général, avec $a \cdot b \neq 0$ et $|a| \neq |b|$. Cherchons les contraintes pour une solution de l'équation $\left(|a+x|^p - |a-x|^p\right) + \left(|b+y|^p - |b-y|^p\right) = 0$ de type $y = t \cdot x$:

3.4.1. Contrainte à l'origine

Préparons l'équation pour le développement en zéro :

$$|a|^p\left(\left|1+\frac{x}{a}\right|^p - \left|1-\frac{x}{a}\right|^p\right) + |b|^p\left(\left|1+\frac{t\cdot x}{b}\right|^p - \left|1-\frac{t\cdot x}{b}\right|^p\right) = 0$$

Développant les puissances au voisinage de zéro, on a :

$$|a|^p\left(2p\frac{x}{a}\right) + |b|^p\left(2p\frac{t\cdot x}{b}\right) \approx 0$$

Ce qui implique $|a|^p\left(\frac{1}{a}\right) + |b|^p\left(\frac{t}{b}\right) = 0 \Leftrightarrow |a|^{p-1} sign(a) + |b|^{p-1} sign(b) \cdot t = 0$.

Soit donc la contrainte sur la pente à l'origine $t = t_0 \equiv -sign\left(\frac{a}{b}\right) \cdot \left|\frac{a}{b}\right|^{p-1}$.

3.4.2. Contrainte à l'infini

Préparons maintenant l'équation $\left(|a+x|^p - |a-x|^p\right) + \left(|b+y|^p - |b-y|^p\right) = 0$ pour une solution de type $y = t \cdot x$ et un développement à l'infini :

$$\left(|a+x|^p - |a-x|^p\right) + \left(|b+t\cdot x|^p - |b-t\cdot x|^p\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow |x|^p\left(\left|1+\frac{a}{x}\right|^p - \left|1-\frac{a}{x}\right|^p\right) + |t|^p|x|^p\left(\left|1+\frac{b}{t\cdot x}\right|^p - \left|1-\frac{b}{t\cdot x}\right|^p\right) = 0$$

Les perpendiculaires de R^2 en norme-p ne sont presque jamais droites sauf pour p=2 !

Développant les puissances au voisinage de zéro, pour $\frac{1}{x}$, on a :

$$|x|^p\left(2p\frac{a}{x}\right)+|t|^p|x|^p\left(2p\frac{b}{t\cdot x}\right)\approx 0$$

Ce qui implique : $(a)+|t|^p\left(\frac{b}{t}\right)=0$

Soit encore : $|t|^{p-1}=-sign(t)\frac{a}{b}$

Le cas $p=1$ implique $\left|\frac{a}{b}\right|=1$, qui est contradictoire avec l'hypothèse du cas général $a\cdot b\neq 0$ et $|a|\neq|b|$. Donc, pour $p=1$, il n'y a pas en général de perpendiculaire qui soit une droite de type $y=t\cdot x$. La norme-1 est donc exclue comme candidate induisant toujours des droites pour les perpendiculaires.

Les cas $p>1$ implique $1=-sign(t)sign\left(\frac{a}{b}\right)$ et $|t|^{p-1}=\left|\frac{a}{b}\right|$, soit donc $sign(t)=-sign\left(\frac{a}{b}\right)$ et

$|t|=\left|\frac{a}{b}\right|^{\frac{1}{p-1}}$.

Donc finalement, la contrainte sur la pente à l'infini est : $t=t_\infty\equiv -sign\left(\frac{a}{b}\right)\left|\frac{a}{b}\right|^{\frac{1}{p-1}}$.

3.4.3. Synthèse des contraintes

Rassemblons les conclusions des deux précédentes sections. La consistance de la solution, de type droite $y=t\cdot x$, à l'origine et à l'infini, requiert donc $t_0=t_\infty$, et $p>1$, soit :

$$-sign\left(\frac{a}{b}\right)\cdot\left|\frac{a}{b}\right|^{p-1}=-sign\left(\frac{a}{b}\right)\left|\frac{a}{b}\right|^{\frac{1}{p-1}}\Leftrightarrow\left|\frac{a}{b}\right|^{p-1}=\left|\frac{a}{b}\right|^{\frac{1}{p-1}},$$

Soit encore : $(p-1)^2=1\Leftrightarrow p=2$.

Vérifions la solution du cas général, avec $a\cdot b\neq 0$, pour $p=2$. L'équation devient :

$$\left((a+x)^2-(a-x)^2\right)+\left((b+y)^2-(b-y)^2\right)=0$$

Et elle se développe en $ax+by=0$.

Le cas général euclidien conduit bien **exactement** une perpendiculaire droite, y compris pour les cas $a=\pm b\neq 0$

$$Per((a,b))=\left\{(x,t\cdot x):x\in R,t=-\frac{a}{b}\right\}$$

Les perpendiculaires de R^2 en norme-p ne sont presque jamais droites sauf pour p=2 !

4 Conclusion

A part pour quelques vecteurs particuliers, les perpendiculaires de R^2 , ne sont donc des droites que pour $p = 2$.

Les perpendiculaires de la norme $p = 1$ mériteraient d'être étudiées à cause de leur comportement singulier à l'infini. Le cas $p = \infty$ mériterait aussi une étude.

Voici donc un pas de plus dans le cheminement annoncé dans l'article précédent[3] : la caractérisation de l'espace euclidien, dans un premier temps, par des contre-exemples de normes déconnectées d'un produit scalaire.

5 Copyright

[3] Voir http://lucas.borboleta.blog.free.fr